

۱۴ ثابت کنید:

الف) $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

ب) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

۱۵ نموداری از یک تابع رسم کنید که:

الف) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد نداشته باشد.
ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد داشته باشد.

۱۶ با رسم نمودار تابع $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ ، حدود زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]$ ب) $\left[\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right]$

۱۷ دو تابع f و g را چنان تعریف کنید که در نقطه $x=0$ حد نداشته باشد، اما $f \times g$ در نقطه $x=0$ دارای حد باشد.

۱۸ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin x - \sin \alpha}{x - \alpha}$

۱۹ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x=2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a[x] + b[-x] & x > 2 \\ 2a + 3 & x = 2 \\ \left[\frac{x}{2} \right] - 2b & x < 2 \end{cases}$$

حسابان ۱ (پایه یازدهم رشته ریاضی)

میر شهرام صدر

۱ مفاهیم زیر را تعریف کنید.

الف) صفرهای تابع:

ب) تابع لگاریتمی:

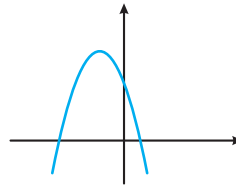
ج) یک رادیان:

د) همسایگی محذوف X :

۲ مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند، چقدر است؟

۳ الف) نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$

به صورت مقابل است. علامت b و c را مشخص کنید.



ب) معادله $2\sqrt{x^2 + x} + 3\sqrt{x} = 0$ چند جواب دارد؟

ج) برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید: $|ab| = |a||b|$

۴ اگر نقطه $A(2, 3)$ رأس یک مربع و معادله یک ضلع مربع $3x - 4y = 9$ باشد، مساحت مربع را محاسبه نمایید.

۵ آیا دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \frac{x - 2x^2}{x}$ و $g(x) = \frac{(x^2 + x)(1 - 2x)}{x(1 + x^2)}$ هم برابرند؟

۶ تعداد ریشه‌های معادله $|x - 2| - \sqrt{x + 1} + 1 = 0$ را به روش هندسی حل معادلات بیابید.

۷ الف) ضابطه، دامنه و برد وارون تابع $f(x) = \sqrt{x - 2}$ را به دست آورید.

ب) برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x - 3}$ و $g(x) = \frac{4}{x - 1}$ ، دامنه تابع $g \circ f$ را به دست آورید.

۸ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 3^{1-x} + 2$ را رسم کنید.

۹ عبارت درست را با \checkmark و عبارت نادرست را با \times علامت بزنید.

الف) لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است.

ب) تابع لگاریتم، تابع یک به یک است.

۱۰ الف) برای اعداد حقیقی $a, b > 0$ و $b \neq 1$ و عدد طبیعی n ، نشان دهید که

$$\log_b a^n = n \log_b a$$

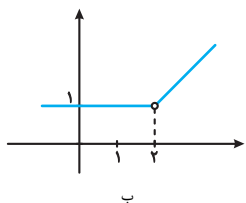
ب) معادله لگاریتمی $1 - \log x = \log(x + 3)$ را حل نمایید.

۱۱ حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف) $\sin \frac{\pi}{12}$ ب) $\cot\left(\frac{-5\pi}{3}\right)$

۱۲ طول برف‌پاک‌کن شیشه عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر است. اگر اندازه کمان طی شده توسط این برف‌پاک‌کن 120° باشد، طول کمان طی شده توسط نوک برف‌پاک‌کن چند سانتی‌متر است؟

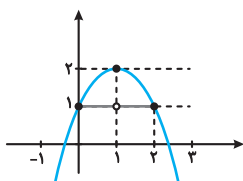
۱۳ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 1 + |\cos x|$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم کنید.



ب

برای نمودارهای درست دیگر، نمره را در نظر بگیرید. این سؤال باز پاسخ است.

۱۶ | با توجه به نمودارهای $y=f(x)$ و $y=[f(x)]$ داریم:



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = [2] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \geq 0 \\ \frac{1}{3} & x < 0 \end{cases}$$

حد دو تابع f و g در نقطه $x=0$ موجود نیست، اما $\lim_{x \rightarrow 0} f \times g = 1$ موجود است، زیرا:

$$f \times g = \begin{cases} 2 \times \frac{1}{2} & x \geq 0 \\ 1 \times \frac{1}{3} & x < 0 \end{cases} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} -\sqrt{x} = -1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin a \cos t + \cos a \sin t - \sin a}{t} = \cos a$$

$$\begin{cases} x-a=t \\ x \rightarrow a \Rightarrow t \rightarrow 0 \\ x=a+t \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2a - 2b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -2b$$

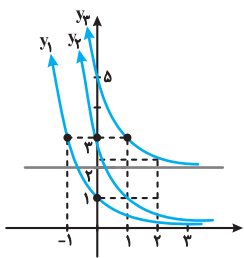
$$\rightarrow 2 = 2a + 2$$

$$\rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = 3^{1-x} + 2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 2$$

$$y_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad y_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$$

$$y_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 2$$



✓ (ب)

$$\log_b a^n = \log_b \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n = \log_b a + \log_b a + \dots + \log_b a = n \log_b a$$

$$\log x + \log(x+2) = 1 \rightarrow x^2 + 2x = 1 \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-5 \end{cases}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{12} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{12} \rightarrow \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

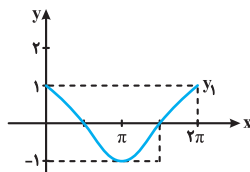
$$\cot\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = -\cot(16\pi + \frac{2\pi}{3}) = -\cot\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ رادیان}$$

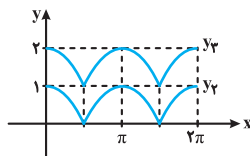
$$L = r\theta = 24 \times \frac{2\pi}{3} = 16\pi \text{ سانتی متر}$$

$$y_1 = \cos x$$

$$y_2 = |\cos x|$$



$$y_3 = 1 + |\cos x|$$

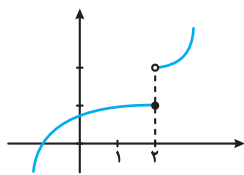


$$\frac{1}{2} [\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha] = \sin \alpha \cos \beta$$

$$-\sin \beta \cos \alpha = \sin \alpha \cos \beta$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$



الف

حسابان ۱ (پایه یازدهم رشته ریاضی)

۱ الف) برای هر تابع f ، جواب‌های معادله $f(x) = 0$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع می‌نامیم.

ب) اگر a عددی مثبت و مخالف یک باشد، تابع نمایی $f(x) = a^x$ یک به یک است از این رو دارای تابع f^{-1} است که تابع لگاریتمی پایه a نامیده می‌شود و با نماد $y = \log_a^x$ نشان داده می‌شود. (ج) یک رادیان، در هر دایره دلخواه، اندازه زاویه‌ای مرکزی است که طول کمان روبه‌رو آن برابر با طول شعاع دایره است. (د) اگر $x \in (a, b)$ ، مجموعه $\{x, (a, b)\}$ را همسایگی محذوف x می‌نامیم.

$$102, 108, 114, \dots, 996$$

$$a_n = a + (n-1)d \rightarrow 996 = 102 + (n-1) \times 6 \rightarrow n = 150$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = 75(102 + 996) = 82350$$

۳ الف) $c > 0$ و $b < 0$ (ب) یک جواب $x=0$ دارد.

$$|ab| = \sqrt{a^2 b^2}$$

$$= \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2}$$

$$= |a||b|$$

۴ $A(2, 2)$ در معادله ضلع مربع صدق نمی‌کند، زیرا:

$$2(2) - 4(2) \neq 9$$

پس A مقابل ضلع این مربع است، بنابراین:

$$AH = a = \frac{|2(2) - 4(2) - 9|}{\Delta} = 3$$

$$13 \quad a^2 = 9 \text{ مساحت مربع}$$

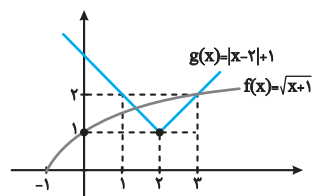
$$D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$g(x) = \frac{x(x^2+1)(1-2x)}{x(1+x^2)} = \frac{x(1-2x)}{1+x^2} = \frac{x-2x^2}{1+x^2} = f(x)$$

زیرا $1+x^2 \neq 0$ و می‌توان آن را از صورت و مخرج ساده کرد.

$$|x-2| - \sqrt{x+1} + 1 = 0 \rightarrow |x-2| + 1 = \sqrt{x+1}$$

۶ با فرض $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = |x-2| + 1$ نمودارهای این دو تابع ملاحظه می‌کنیم که این معادله دارای دو ریشه است.



$$15 \quad \text{الف) } D_f = [2, +\infty) = R_f^{-1}, \quad R_f = [1, +\infty) = D_f^{-1}$$

$$y = \sqrt{x-2} \rightarrow y^2 = x-2 \rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 2$$

$$\text{ب) } D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$x \in \mathbb{R} - \{2\} \mid \frac{1}{x-2} \neq 1 \rightarrow x \neq 4$$

$$\rightarrow D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{2, 4\}$$